



## Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

13 februarie 2010

Clasa a V-a

**SOLUȚII**

**Problema 1.** Se consideră numerele naturale  $a, b, c$  care verifică egalitățile:

$$a \cdot c + b \cdot c = a \cdot b + b^2 \text{ și } a + b = 2010.$$

- a) Să se compare numerele  $b$  și  $c$ ;
- b) Să se calculeze  $2 \cdot a + b + c$ ;
- c) Să se calculeze  $(a^2 + a \cdot b + b^2) \cdot (b^2 - c^2) \cdot (c^2 + a^2)$ .

**Gusta Constanța, profesor, Galați**

**Soluție :**

a) Din  $a \cdot c + b \cdot c = a \cdot b + b^2$ , obținem:

$$\left. \begin{array}{l} c \cdot (a + b) = b \cdot (a + b) \\ a + b = 2010 \end{array} \right\} \Rightarrow c = b.$$

b) Din  $b = c \Rightarrow 2 \cdot a + b + c = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 2 \cdot (a + b) = 4020$ .

c) Din  $b = c \Rightarrow b^2 = c^2 \Rightarrow (a^2 + a \cdot b + b^2) \cdot (b^2 - c^2) \cdot (c^2 + a^2) = 0$ .

**Problema 2.** Să se determine numerele naturale mai mici decât 5000, care au ultima cifră 7 și sunt de forma  $7^m + 6^n$ ,  $m, n$  sunt numere naturale.

**Guiță Visilina, profesor, Galați**

**Soluție :**  $u(6^n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 6, & n \geq 1 \end{cases}$  iar  $u(7^m) \in \{1, 7, 9, 3\}$ . Pentru a obține ultima cifră 7, convine

numai  $u(6^n) = 6$ , pentru  $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ . Atunci

$u(7^m) = 1 \Rightarrow m$  este multiplu de 4  $\Rightarrow m \in \{0; 4;\}$  Pentru  $m \geq 8 \Rightarrow 7^8 > 5000$ .

I. Dacă  $m = 0 \Rightarrow 7^0 = 1$ ;

Atunci, numerele  $6^n$  care adunate cu 1 să dea un număr mai mic decât 5000 pot fi :  
6; 36; 216; 1296. În acest caz, numerele căutate sunt : 7; 37; 217; 1297.

II. Dacă  $m = 4 \Rightarrow 7^4 = 2401$ ;

atunci, numerele  $6^n$  care adunate cu 2401 să dea un număr mai mic decât 5000 sunt:  
6; 36; 216; 1296. În acest caz, numerele căutate sunt: 2407; 2437; 2617; 3697. În  
concluzie, toate numerele căutate sunt: 7; 37; 217; 1297, 2407; 2437; 2617; 3697.

**Problema 3.** Se consideră numerele naturale  $m = 2009^2 + 2009$  și

$n = \text{suma tuturor numerelor de forma } \overline{200c}^{2010}$ , unde  $c$  este o cifră din sistemul de  
numerație zecimal.

- Să se demonstreze că numerele  $m$  și  $n$  se divid cu 5;
- Să se determine cel mai mare număr natural  $k$  astfel încât numărul  $m$  să se dividă  
cu  $7^k$ ;
- Să se determine câtul și restul împărțirii numărului  $m$  la numărul 2747.

**Duma Vasile, profesor, Galați**

**Soluție :a)**

$$m = 2009 \cdot 2010 \Rightarrow u(2009 \cdot 2010) = 0 \Rightarrow 5 / m;$$

$$u(\overline{200c}^{2010}) = u(c^2) \Rightarrow u(n) = u(0+1+4+9+6+5+6+9+4+1) = 5 \Rightarrow 5 / n.$$

b) Din

$m = 2009 \cdot 2010$ , se verifică care din cei doi factori se divide cu 7. Acesta este 2009.

Apoi se verifică dacă 2009 se divide cu 49(A), apoi cu 343(Fals).

Așadar,  $k=2$ .

c)

$$2747 = 41 \cdot 67 \Rightarrow m = 2009 \cdot 2010 = 7^2 \cdot 41 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 \Rightarrow m = 2747 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2) \Rightarrow$$

$$m = 2747 \cdot 1470 \Rightarrow \text{câtul este } 1470 \text{ și restul este zero.}$$

**Problema 4.**

- a) Să se determine ultimele două cifre ale produsului  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$ .
- b) Notăm  $a = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2009 \cdot 2010$ . Să se demonstreze că numărul  $a + 2$  nu este pătrat perfect.

**Romeo Zamfir, profesor, Galați**

**Soluție.** a) În produsul  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$  există factorii 2, 5 și 10, deci produsul  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$  se divide cu 100. Deci, ultimele două cifre ale produsului  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$  sunt 00.

b) Dacă notăm  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ , atunci  $a = 1! + 2! + 3! + \dots + 2010!$ , iar  $1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ ,  $4! = 24$ ,  $5! = 120$ ,  $6! = 720$ ,  $7! = 5040$ ,  $8! = 40320$ ,  $9! = 362880$  și 100 divide  $n!$ , pentru orice  $n \geq 10$ . Rezultă că numărul natural  $a$  are ultimele două cifre 13, iar  $a + 2$  are ultimele două cifre 15, de unde rezultă că  $a + 2$  nu este pătrat perfect (este cunoscut faptul că dacă un număr natural care are ultima cifră 5 și este pătrat perfect, atunci penultima cifră este egală cu 2)

**Observație.** Rezultatul din paranteză este cunoscut de elevii din clasa a V-a și el este o consecință a calculului următor

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n 5}^2 = \left( \overline{a_1 a_2 \dots a_n 0} + 5 \right)^2 = (10 \cdot x + 5)^2 = (10 \cdot x + 5) \cdot (10 \cdot x + 5) = 10 \cdot x \cdot (10 \cdot x + 5) + 5 \cdot (10 \cdot x + 5) = 100 \cdot x^2 + 50 \cdot x + 50 \cdot x + 25 = 100 \cdot x^2 + 100 \cdot x + 25, \text{ unde } x = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

